Corrigé exercice 120 :

1. Si $n = 1$, $5 \equiv 5\,[9]$. Si $n = 2$, $5^2 \equiv 7\,[9]$. Si $n = 3$, $5^3 \equiv 8\,[9]$. Si $n = 4$, $5^4 \equiv 4\,[9]$. Si $n = 5$, $5^5 \equiv 2\,[9]$. Enfin, si $n = 6$, $5^6 \equiv 1\,[9]$.

   Ainsi, pour tous k et a entiers naturels, $5^{6\times k+a} \equiv (6^6)^k \times 5^a[9]$.

   D'où, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $5^{6k+1} \equiv 5\,[9]$, $5^{6k+2} \equiv 7\,[9]$, $5^{6k+3} \equiv 8\,[9]$, $5^{6k+4} \equiv 4\,[9]$, $5^{6k+5} \equiv 2\,[9]$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $5^{6k} \equiv 1\,[9]$.

2. Tout d'abord, $2021 = 9 \times 224 + 5$, d'où $2021 \equiv 5\,[9]$ et donc $2021^{2021} \equiv 5^{2021}\,[9]$. De plus, $2021 = 6 \times 336 + 5$ donc $2021 = 6k + 5$, avec $k = 336$.

   Ainsi, d'après la question précédente, $5^{2021} \equiv 2\,[9]$, soit $2021^{2021} \equiv 2\,[9]$.

3. Soit $A = 2021^{2021}$.

   Alors $2021 < 10^4$ donc $2021^{2021} < (10^4)^{2021}$, c'est-à-dire $2021^{2021} < 10^{8084}$. Ainsi, 2021^{2021} est strictement inférieur à un nombre ayant 8085 chiffres. Il a donc au plus 8084 chiffres.

Corrigé exercice 123 :

1. a. $40 = 13 + 27$. Or $13 = 1^3 + 7^3 + 10^3 - 11^3$ et $27 = 3^3$. Ainsi, $40 = 1^3 + 7^3 + 10^3 - 11^3 + 3^3$.

   b. $48 = 6 \times 8 = (8 + 1)^3 + (8 - 1)^3 - 8^3 - 8^3$, soit $48 = 9^3 + 7^3 - 8^3 - 8^3$.
   On en déduit que $40 = 48 - 8 = 9^3 + 7^3 - 8^3 - 8^3 - 2^3$.

2. a. On construit le tableau de congruence modulo 9 ci-dessous.

$n \equiv ...\,[9]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$n^3 \equiv ...\,[9]$	0	1	$8 \equiv -1$	$27 \equiv 0$	1	–1	0	1	–1

   b. Supposons que 40 peut se décomposer en une somme de 3 cubes. On a alors $40 = a^3 + b^3 + c^3$ avec a, b et c des entiers. D'après le tableau de la question précédente, a^3, b^3 et c^3 sont congrus modulo 9 à –1, 0 ou 1.
   Donc $a^3+b^3+c^3$ est congru à –3, –2, –1, 0, 1, 2 ou 3 modulo 9. Or $40 = 9\times4+4$, soit $40 \equiv 4\,[9]$, donc 40 ne peut pas se décomposer en une somme de trois cubes.

Corrigé exercice 124 :

1. a. On a $\overline{ababab} = a10^5 + b10^4 + a10^3 + b10^2 + a \times 10 + b$.

   b. $\overline{ababab} = a10^5 + b10^4 + a10^3 + b10^2 + a \times 10 + b$ donc $\overline{ababab} = 10^4(10a + b) + 10^2(10a+b)+(10a+b)$ d'où $\overline{ababab} = (10a+b)(10^4+10^2+1) = \overline{ab}(10^4+10^2+1)$.
   Donc $\overline{ababab}$ est un multiple de $\overline{ab}$.

2. a. S est la somme des termes d'une suite géométrique de raison 10^2 et de premier terme 1. Ainsi, $S = \dfrac{1 - (10^2)^n}{1 - 10^2} = \dfrac{10^{2n} - 1}{99}$.

   b. On a $\overline{ab...ab} = \overline{ab}\,(1 + 10^2 + ... + 10^{2n-2}) = \overline{ab} \times S$.

3. a. Soit N un entier naturel tel que $N|\overline{ab}$. Il existe donc un entier k tel que $\overline{ab} = kN$. Or $\overline{ab...ab} = \overline{ab} \times S$, avec S un entier en tant que somme d'entiers. D'où $\overline{ab...ab} = kN \times S = (kS) \times N$ avec kS un entier. On en déduit donc que N divise $\overline{ab...ab}$.

   b. La réciproque est fausse. En effet, 2323 est divisible par 2323 mais 2323 ne divise pas 23.

Corrigé exercice 127 :

1. Le numéro ISSN du journal Ouest-France est 0999-2138.

   Dans ce cas, on a $S = 8 \times 0 + 7 \times 9 + 6 \times 9 + 5 \times 9 + 4 \times 2 + 3 \times 1 + 2 \times 3 = 179$. Or $-179 = -17 \times 11 + 8$ et $0 \leqslant 8 < 11$ donc le reste de la division euclidienne de S par 11 est 8. La clé est donc 8 ce qui correspond bien au dernier chiffre du code ISSN donné.

2. Dans ce cas, on a $S = 8 \times 2 + 7 \times 4 + 6 \times 9 + 5 \times 5 + 4 \times 4 + 3 \times 5 + 2 \times 4 = 162$. Or $-162 = -11 \times 15 + 3$ donc la clé de contrôle est 3.

3. a. On a $S = 8 \times 0 + 7 \times 3 + 6 \times n + 5 \times 5 + 4 \times 2 + 3 \times 0 + 2 \times 3 = 60 + 6n$.

   b. On a $-S \equiv 7[11]$, d'où $60+6n \equiv -7[11]$ donc $6n \equiv -1[11]$ et ainsi $6n \equiv 10[11]$.

   c. On construit un tableau de congruence modulo 11.

$n \equiv \ldots [11]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$6n \equiv \ldots [11]$	0	6	1	7	2	8	3	9	4	10	5

   On en déduit que $n \equiv 9[11]$. Or on cherche $n < 11$ donc $n = 9$. Réciproquement, en remplaçant n par 9, on obtient $S = 114$, ce qui donne bien une clé valant 7. Donc $n = 9$.

Corrigé exercice 131 :

Partie A : Critère de divisibilité par 5 et par 10

1. Soit $N = a_n 10^n + ... + a_1 10^1 + a_0$, où $a_0, \ldots, a_n$ désignent des entiers compris entre 0 et 9, avec $a_n \neq 0$. On a alors $N = 10(a_n 10^{n-1} + ... + a_1) + a_0$.

   Or $10(a_n 10^{n-1} + ... + a_1) \equiv 0[10]$ donc $N \equiv 0[10]$ si, et seulement si, $a_0 \equiv 0[10]$. Or $0 \leqslant a_0 < 10$ donc $a_0 = 0$.

   Réciproquement, s'il existe des entiers compris entre 0 et 9 tels que $N = a_n 10^n + \ldots + a_1 10$, alors $N = 10 \times (a_n 10^{n-1} + \ldots + a_1)$ et N est donc divisible par 10.

   Un nombre entier N est donc divisible par 10 si, et seulement si, son chiffre des unités est 0.

2. De même, posons $N = a_n 10^n + ... + a_1 10^1 + a_0$, avec $a_0, \ldots, a_n$ des entiers compris entre 0 et 9. On a donc alors $N = 5(2a_n 10^{n-1} + ... + 2a_1) + a_0$. D'où $N \equiv 0[5]$ si, et seulement si, $a_0 \equiv 0[5]$. Or $0 \leqslant a_0 < 10$ donc $a_0 = 0$ ou $a_0 = 5$.

   On vérifie la réciproque comme ci-dessus.

   Un nombre entier N est donc divisible par 5 si, et seulement si, son chiffre des unités est 0 ou 5.

Partie B : Critère de divisibilité par 11

1. Soit N un nombre entier. On peut écrire $N = 10a + b$ avec a et b deux entiers avec $0 \leqslant b \leqslant 9$.

   Or $10 \equiv -1[11]$ donc $10a + b \equiv -a + b[11]$.

   Ainsi, $-a + b \equiv 0[11]$ si, et seulement si, $10a + b \equiv 0[11]$.

   Un nombre entier N est donc divisible par 11 si, et seulement si, la différence entre son nombre de dizaines et son chiffre des unités est divisible par 11.

2. $1067 = 106 \times 10 + 7$. Or $106 - 7 = 99$ et 99 est divisible par 11 donc, d'après le critère qu'on vient de démontrer, 1067 est divisible par 11.

   $333 = 33 \times 10 + 3$. Or $33 - 3 = 30$ et 30 n'est pas divisible par 11, donc 333 n'est pas divisible par 11.